

# Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2017,  
Convocatoria extraordinaria

[mentoor.es](http://mentoor.es)



## Problema A.1. Álgebra

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden 3 tales que  $A^2 = -A - I$  y  $2B^3 = B$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Obtener razonadamente:

- La justificación de que la matriz  $A$  es invertible y el cálculo de la matriz  $A^3$  en función de  $A$  y de  $I$ .
- Los valores posibles del determinante de  $B$ .
- El valor del determinante de la matriz  $B^2$ , sabiendo que la matriz  $B$  tiene inversa.

**Solución:**

- La justificación de que la matriz  $A$  es invertible y el cálculo de la matriz  $A^3$  en función de  $A$  y de  $I$ .

Invertibilidad:

Para justificar que  $A$  es invertible, debemos demostrar que existe una matriz  $A^{-1}$  tal que  $A \cdot A^{-1} = I$ .

Partimos de la relación dada:

$$A^2 = -A - I \implies A^2 + A = -I.$$

Sacando factor común  $A$  por la izquierda:  $A(A + I) = -I$ .

Multiplicando por  $-1$ :  $A(-(A + I)) = I$ .

Hemos encontrado una matriz,  $-(A + I)$ , que multiplicada por  $A$  da la identidad. Por lo tanto,  $A$  es invertible y  $A^{-1} = -(A + I) = -A - I$ .

Cálculo de  $A^3$ :

$A^3 = A \cdot A^2$ . Sustituimos  $A^2$  por la expresión dada:

$$A^3 = A(-A - I) = -A^2 - A.$$

Ahora sustituimos de nuevo  $A^2$ :

$$A^3 = -(-A - I) - A = A + I - A = I.$$

**$A$  es invertible con  $A^{-1} = -A - I$ . Se calcula que  $A^3 = I$ .**

- Los valores posibles del determinante de  $B$ .

Partimos de la igualdad  $2B^3 = B$ . Aplicamos la propiedad del determinante de un producto y de una constante por una matriz (de orden 3):

$$\det(2B^3) = \det(B) \implies 2^3 \det(B^3) = \det(B) \implies 8(\det(B))^3 = \det(B).$$

Sea  $d = \det(B)$ . La ecuación es  $8d^3 = d \implies 8d^3 - d = 0$ .

Sacamos factor común:  $d(8d^2 - 1) = 0$ .

Esto nos da tres posibles soluciones:  $d = 0$  y  $8d^2 - 1 = 0 \implies d^2 = 1/8 \implies d = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

**Los valores posibles son  $0$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  y  $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .**

- El valor del determinante de la matriz  $B^2$ , sabiendo que la matriz  $B$  tiene inversa.

Si  $B$  tiene inversa, su determinante no puede ser cero. De los valores del apartado anterior, descartamos  $d = 0$ .

Por lo tanto,  $\det(B) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

El determinante de  $B^2$  es, por propiedades,  $(\det(B))^2$ .



$$\det(B^2) = \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\det(B^2) = 1/8.}$$



## Problema A.2. Geometría

Se dan la recta  $r : \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$  y el plano  $\pi : 2x + y + mz = n$ .

- Los valores de  $m$  y  $n$  para los que la recta  $r$  y el plano se cortan en un punto.
- Los valores de  $m$  y  $n$  para los que la recta  $r$  y el plano no se cortan.
- Los valores de  $m$  y  $n$  para los que la recta  $r$  está contenida en el plano  $\pi$ .

**Solución:**

La posición relativa se estudia analizando el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & n \end{array} \right)$$

$$|A| = 1(3m + 1) - (-2)(m + 2) + (-2)(1 - 6) = 3m + 1 + 2m + 4 + 10 = 5m + 15$$

$$|A| = 0 \iff 5m + 15 = 0 \iff m = -3.$$

- Los valores de  $m$  y  $n$  para los que la recta  $r$  y el plano se cortan en un punto.

Esto ocurre cuando el sistema es S.C.D., es decir, cuando  $|A| \neq 0 \implies m \neq -3$ .  
 En este caso  $\text{Rg}(A) = 3$ , lo que implica  $\text{Rg}(A^*) = 3$ .  
 El valor de  $n$  puede ser cualquiera.

$$\boxed{m \neq -3, \forall n \in \mathbb{R}.}$$

- Los valores de  $m$  y  $n$  para los que la recta  $r$  y el plano no se cortan.

Esto ocurre si son paralelos, es decir, si el sistema es S.I. Esto requiere  $|A| = 0 \implies m = -3$ .  
 Para  $m = -3$ ,  $\text{Rg}(A) = 2$ . Estudiamos  $\text{Rg}(A^*)$ .

$$\det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 1(3n - 1) - (-2)(n - 2) + 1(1 - 6) = 3n - 1 + 2n - 4 - 5 = 5n - 10.$$

Para que sea S.I.,  $\text{Rg}(A^*) > \text{Rg}(A)$ , por lo que  $\text{Rg}(A^*) = 3$ . Esto ocurre si  $5n - 10 \neq 0 \implies n \neq 2$ .

$$\boxed{m = -3, n \neq 2.}$$

- Los valores de  $m$  y  $n$  para los que la recta  $r$  está contenida en el plano  $\pi$ .

Esto ocurre si el sistema es S.C.I., es decir, si  $m = -3$  y  $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2$ .  
 Esto requiere que el menor de orden 3 de  $A^*$  sea nulo:  $5n - 10 = 0 \implies n = 2$ .

$$\boxed{m = -3, n = 2.}$$



### Problema A.3. Análisis

Se consideran las curvas  $y = x^3$ ,  $y = ax$  y la función  $f(x) = x^3 - ax$  ( $a > 0$ ).

- Los puntos de corte de la curva  $y = f(x)$  con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$ .
- La gráfica de la función  $f$  cuando  $a=9$ .
- Calcular, en función del parámetro  $a$ , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas  $y = x^3$  y  $y = ax$ , cuando  $a > 1$ .
- El valor del parámetro  $a$  para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva  $y = x^3$ , el eje OX y las rectas  $x=0$  y  $x=2$ .

Solución:

- Los puntos de corte de la curva  $y = f(x)$  con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$ .

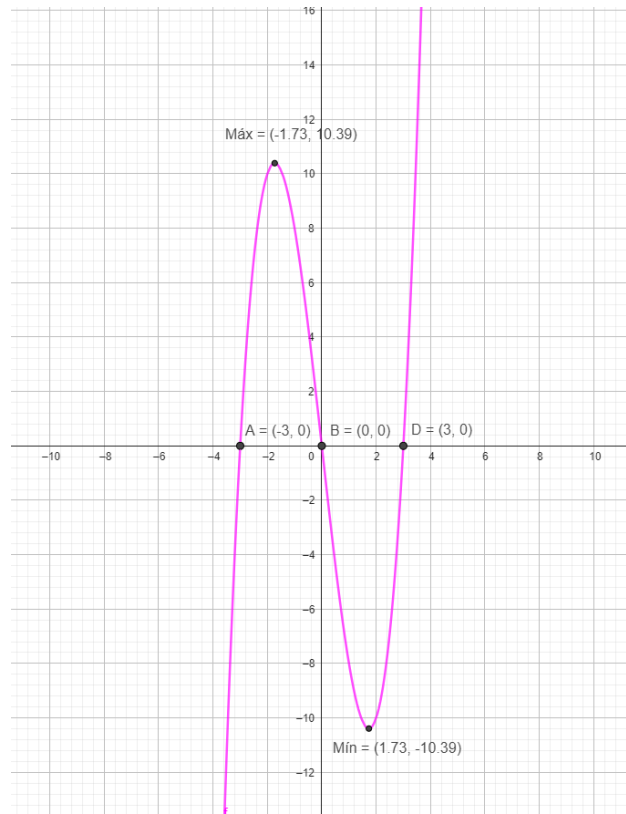
Cortes con ejes: Si  $x = 0, y = 0$ . Si  $y = 0, x(x^2 - a) = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{a}$ .

Monotonía:  $f'(x) = 3x^2 - a$ .  $f'(x) = 0 \implies x = \pm\sqrt{a/3}$ .

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{a/3})$	$(-\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3})$	$(\sqrt{a/3}, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Cortes:  $(0, 0), (\pm\sqrt{a}, 0)$ . Crece en  $(-\infty, -\sqrt{a/3}) \cup (\sqrt{a/3}, \infty)$ .

- La gráfica de la función  $f$  cuando  $a=9$ .



Para  $a = 9$ ,  $f(x) = x^3 - 9x$ .

Cortes en  $(0, 0)$ ,  $(\pm 3, 0)$ .

Mínimo en  $x = \sqrt{3}$ , máximo en  $x = -\sqrt{3}$ .

- c) **Calcular, en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante...**  
 Intersecciones:  $x^3 = ax \implies x = 0, x = \sqrt{a}$  (primer cuadrante). En  $(0, \sqrt{a})$ , la recta  $y = ax$  está por encima.

$$A(a) = \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3) dx = \left[ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

El área es  $A(a) = a^2/4$  unidades cuadradas.

- d) **El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva  $y = x^3$ , el eje OX y las rectas  $x=0$  y  $x=2$ .**

Área bajo  $y = x^3$ :

$$A_2 = \int_0^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

Igualamos las áreas:

$$A(a) = A_2 \implies a^2/4 = 4 \implies a^2 = 16 \implies a = 4 \text{ (ya que } a > 0 \text{)}.$$

**a = 4.**



## Problema B.1. Álgebra

Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Obtener razonadamente:

- La justificación de que  $A$  tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa  $A^{-1}$ .
- La justificación de que  $A^4 = I$ .
- El cálculo de las matrices  $A^7$ ,  $A^{30}$  y  $A^{100}$ .

Solución:

- La justificación de que  $A$  tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa  $A^{-1}$ .  
 $|A| = 0 - 0 - 1(0 - 1) = 1$ . Como  $|A| \neq 0$ ,  $A$  tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ tiene inversa pues $ A  = 1 \neq 0$ . $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
---

- La justificación de que  $A^4 = I$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Queda justificado al realizar el producto $(A \cdot A) \cdot (A \cdot A)$ .
---

- El cálculo de las matrices  $A^7$ ,  $A^{30}$  y  $A^{100}$ .

$$A^7 = A^4 A^3 = I A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

$$A^{30} = (A^4)^7 A^2 = I^7 A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = I^{25} = I.$$

$A^7 = A^{-1}$ , $A^{30} = A^2$ , $A^{100} = I$ .
---



## Problema B.2. Geometría

Se dan la recta  $r : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$  y el plano  $\pi : 2x - y + bz = 0$ , siendo  $a$  y  $b$  dos parámetros reales. Obtener razonadamente:

- El punto de intersección de la recta  $r$  y el plano cuando  $a = -b = 1$ .
- La distancia entre la recta  $r$  y el plano cuando  $a = b = 4$ .
- La posición relativa de la recta  $r$  y del plano en función de los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ .

Solución:

- El punto de intersección de la recta  $r$  y el plano cuando  $a = -b = 1$ .

$a = 1, b = -1. a + b = 0 \neq 8$ . Son secantes.

$r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(4, 1, -1). \pi : 2x - y - z = 0$ .

$$2(1 + 4\lambda) - (\lambda) - (1 - \lambda) = 0 \implies 8\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1/8.$$

Punto:  $(1 - 4/8, -1/8, 1 + 1/8) = (1/2, -1/8, 9/8)$ .

El punto es  $(1/2, -1/8, 9/8)$ .

- La distancia entre la recta  $r$  y el plano cuando  $a = b = 4$ .

$a = 4, b = 4. a + b = 8. b = 4 \neq -2$ . Son paralelos.

Distancia de  $P(1, 0, 1)$  a  $\pi : 2x - y + 4z = 0$ .

$$d(P, \pi) = \frac{|2(1) - 0 + 4(1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}}$$

La distancia es  $\frac{6\sqrt{21}}{21}$  unidades.

- La posición relativa de la recta  $r$  y del plano en función de los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ . (Se resuelve primero para facilitar los otros apartados)

$\vec{v}_r = (4, a, -1), \vec{n}_\pi = (2, -1, b)$ .

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 8 - a - b.$$

Si  $8 - a - b \neq 0$ , son **secantes**.

Si  $8 - a - b = 0$ , son paralelos o la recta está contenida. Punto de  $r$ :  $P(1, 0, 1)$ .

Sustituimos  $P$  en  $\pi$ :  $2(1) - 0 + b(1) = 0 \implies 2 + b = 0 \implies b = -2$ .

Si  $a + b \neq 8$ , secantes. Si  $a = 10, b = -2$ , contenida. Si  $a + b = 8, b \neq -2$ , paralelos.

### Problema B.3. Análisis

Se considera el triángulo T de vértices O(0,0), A(x,y) y B(0,y), siendo  $x > 0$ ,  $y > 0$ , y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener razonadamente:

- El área del triángulo T en función de x.
- El valor de x para el que dicha área es máxima.
- El valor de dicha área máxima.

Solución:

- El área del triángulo T en función de x.

Lado OA:  $d_{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Lado AB (distancia de A a B):  $d_{AB} = x$ .

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 30 \implies \sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x$$

$$x^2 + y^2 = (30 - x)^2 = 900 - 60x + x^2 \implies y^2 = 900 - 60x \implies y = \sqrt{900 - 60x}.$$

$$\text{Área } A(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{900 - 60x}.$$

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{900 - 60x}.$$

- El valor de x para el que dicha área es máxima.

Maximizamos  $g(x) = A(x)^2 = \frac{x^2}{4}(900 - 60x) = \frac{1}{4}(900x^2 - 60x^3)$ .

$$g'(x) = \frac{1}{4}(1800x - 180x^2)$$

$$g'(x) = 0 \implies 180x(10 - x) = 0. \text{ Soluciones } x = 0, x = 10.$$

Estudiamos la monotonía:

<b>Intervalo</b>	(0, 10)	(10, 15)
<b>Signo <math>A'(x)</math></b>	+	-
<b><math>A(x)</math></b>	Creciente ↗	Decreciente ↘

El máximo se da para  $x = 10$ .

$$x = 10 \text{ metros.}$$

- El valor de dicha área máxima.

$$A(10) = \frac{10}{2}\sqrt{900 - 600} = 5\sqrt{300} = 5(10\sqrt{3}) = 50\sqrt{3}$$

$$\text{El área máxima es } 50\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

